Spécial Bac

Tle

Nouveau BAC

120 fiches pour réussir !

Compil

MATHS Spé + Expertes

SVT Spé

- Cours ultra-visuels
- Exercices commentés
- Schémas-bilans
- Quiz de mémorisation active
- Préparation au Grand Oral

MAGNARD

MATHS

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Géométrie

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Produit scalaire et orthogonalité

Analyse

Suites

Limites de fonctions

Continuité et dérivation

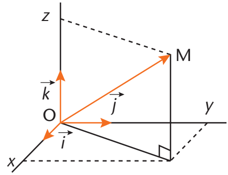
Logarithme népérien

Vecteurs et translations

FICHE 1

I Repères de l'espace

1. Introduction



• **Définition :** un **repère de l'espace** est un quadruplet constitué d'un point et de trois vecteurs non coplanaires, par exemple $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

• Pour tout point M de l'espace, il existe trois **nombres uniques** x, y et z tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

• x, y et z sont respectivement l'abscisse, l'ordonnée et la cote de M ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

• Si les trois vecteurs sont deux à deux orthogonaux et de même longueur, on dit que le repère est **orthonormé**.

• Sur la figure, les segments en pointillés sont perpendiculaires aux axes.

• D'après l'unicité de x, y et z, deux vecteurs sont égaux, si et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées dans un même repère.

> **Pour aller plus loin :** rechercher les principes du calcul vectoriel à trois dimensions dans les œuvres de Maxwell, Gibbs, Heaviside.

> Le **vecteur nul** est le vecteur dont les coordonnées sont toutes égales à 0 ; il se note $\vec{0}$.

2. Formules

• On donne un repère quelconque de l'espace et les points $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ dont le milieu est I et deux vecteurs $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{u}'(x'\,;y'\,;z')$: **$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;\,y_B - y_A\,;\,z_B - z_A)$;**

$I\left(\dfrac{x_B + x_A}{2}\,;\,\dfrac{y_B + y_A}{2}\,;\,\dfrac{z_B + z_A}{2}\right)$; $\vec{u} + \vec{u}'(x + x'\,;y + y'\,;z + z')$

et $\alpha\vec{u}\,(\alpha x\,;\alpha y\,;\alpha z)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

• Translation : la translation t de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ transforme un point M(x, y, z) en un point M′(x', y', z') tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$.

• On remarque que ces formules généralisent celles que l'on a déjà vues dans le plan.

II Application

• **Énoncé type :** dans l'espace muni d'un repère, on donne trois points A(2 ; 3 ; – 1), B(–1 , 2 ,0) et C(1 , – 4 , 2). À tout point M(x, y, z), on associe le vecteur $\vec{u} = 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC}$.

1. Exprimer les coordonnées de $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ en fonction de celles de M.

2. Exprimer les coordonnées de $\vec{u}$ en fonction de celles de M.

3. Démontrer qu'il existe un unique point M tel que $\vec{u} = \vec{0}$. On note G ce point.

4. Exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\overrightarrow{MG}$.

• **Réponses : 1.** On a successivement $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} 2-x \\ 3-y \\ -1-z \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix} -1-x \\ 2-y \\ -z \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MC}\begin{pmatrix} 1-x \\ -4-y \\ 2-z \end{pmatrix}$.

2. Les coordonnées de $\vec{u}$ se calculent ainsi :

$$\begin{pmatrix} 4-2x \\ 6-2y \\ -2-2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3+3x \\ -6+3y \\ 3z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5-5x \\ -20-5y \\ 10-5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-4x \\ -20-4y \\ 8-4z \end{pmatrix}.$$

3. On déduit de la question précédente que $\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 12-4x=0 \\ -20-4y=0, \\ 8-4z=0 \end{cases}$

c'est-à-dire $x = 3$; $y = -5$ et $z = 2$. On vient donc de démontrer qu'il existe un unique point M tel que $\vec{u} = \vec{0}$ et que les coordonnées de ce point sont (3 ; –5 ; 2).

4. On constate que $\begin{pmatrix} 12-4x \\ -20-4y \\ 8-4z \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 3-x \\ -5-y \\ 2-z \end{pmatrix}$. Or $\begin{pmatrix} 3-x \\ -5-y \\ 2-z \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{MG}$. Par conséquent, $\vec{u} = 4\overrightarrow{MG}$.

BILAN

Vecteurs, droites et plans de l'espace

FICHE 5

QUIZ-Mémorisation active

1 Vecteurs et translations

Questions	Réponses
Étant donné deux points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$, comment calcule-t-on les coordonnées du milieu de [AB] ? du vecteur $\overrightarrow{AB}$?	Les coordonnées du milieu de [AB] sont la demi-somme des coordonnées de A et B. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$: différence des coordonnées de A et B.
Quels liens y a-t-il entre les coordonnées d'un point M(x, y, z) et son image M′(x', y', z') par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$?	Comme $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ on a : $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b. \\ z' = z + c \end{cases}$

2 Droites et plans

Questions	Réponses
Quelle différence y a-t-il entre des droites orthogonales et des droites perpendiculaires ?	Des droites perpendiculaires sont nécessairement sécantes : c'est toujours le cas dans un plan. Dans l'espace, c'est différent : $\mathcal{D}$ est orthogonale à $\mathcal{D}'$ si, et seulement si, il existe une droite parallèle à $\mathcal{D}'$ qui soit perpendiculaire à $\mathcal{D}$.
Si une droite est parallèle à un plan est-elle parallèle à toute droite de ce plan ? Comparer avec une droite orthogonale à un plan.	Non. Il suffit de penser à un cube (voir fiche 02) : (AE) est parallèle à (CDHG) mais n'est pas parallèle à (CD). En revanche, si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

3 Équations paramétriques d'une droite

Questions	Réponses
Si on connaît les coordonnées de deux points distincts d'une droite, comment faire pour en trouver des équations paramétriques ?	Pour connaître les équations paramétriques d'une droite, il suffit de connaître les coordonnées d'un point et d'un de ses vecteurs directeurs. Il suffit ici de choisir $\overrightarrow{AB}$.

SCHÉMAS-BILANS

Écrire des équations paramétriques d'une droite $\mathcal{D}$ dans l'espace

On connaît les coordonnées d'un point A.

- non → *voir fiche 7*
- oui → On connaît les coordonnées d'un point B.
  - oui → $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
  - non → On connaît les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de $\mathcal{D}$.
    - non → *voir fiche 7*
    - oui ↓

$M(x,y,z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

$$\text{Si } \vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : \begin{cases} x - x_A = ta \\ y - y_A = tb \\ z - z_A = tc \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$

Trouver les coordonnées du point d'intersection éventuel de deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$

$$\mathcal{D} \begin{cases} x = \alpha + ta \\ y = \beta + tb \\ z = \gamma + tc \end{cases} \qquad \mathcal{D}' \begin{cases} x = \alpha' + t'a' \\ y = \beta' + t'b' \\ z = \gamma' + t'c' \end{cases}$$

On peut trouver t et t' solutions de
$$\begin{cases} \alpha + ta = \alpha' + t'a' \\ \beta + tb = \beta' + t'b' \\ \gamma + tc = \gamma' + t'c' \end{cases}$$

- oui → $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes.
- non → $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sont colinéaires.
  - oui → $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.
  - non → $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont non coplanaires.

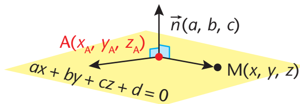
Équations cartésiennes de plans

FICHE 7

I Forme générale de l'équation cartésienne d'un plan

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace.

- **Théorème :** tout plan $\mathscr{P}$ dont un vecteur normal a pour coordonnées $(a\,;b\,;c)$ a une équation cartésienne de la forme



$ax + by + cz + d = 0.$

En effet, soit $A(x_A\,, y_A\,, z_A)$ un point de $\mathscr{P}$: $M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$

De plus

$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = (x - x_A)a + (y - y_A)b + (z - z_A)c = ax + by + cz + d = 0$

avec $d = -ax_A - by_A - cz_A$ car les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ sont $\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z = z_A \end{pmatrix}$.

- Réciproquement si a, b, c sont trois nombres tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ toute équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ est celle d'un plan dont $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ est un vecteur normal.

Un vecteur normal à un plan est un vecteur orthogonal à deux vecteurs **non colinéaires** de ce plan.

- Un plan a une infinité d'équations cartésiennes. Si $ax + by + cz + d = 0$ est l'une d'elles, alors $k(ax + by + cz + d) = 0$ en est une autre pour tout réel $k \neq 0$.

Pour aller plus loin :
René Descartes a fondé la géométrie repérée. On parle de repères cartésiens en son honneur.

- Deux plans d'équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont perpendiculaires si, et seulement si, leurs vecteurs normaux le sont, c'est-à-dire si, et seulement si, $aa' + bb' + cc' = 0$.

II Applications

1. Systèmes d'équations

• Tout système de trois **équations à trois inconnues** x, y, z de la forme $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ ax' + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$ peut s'interpréter comme l'intersection de trois plans (→ *voir fiche 2*).

2. Droite définie par l'intersection de deux plans

• Une droite peut être définie par un de ses points et un vecteur directeur, mais aussi par l'intersection de deux plans. Comment alors **déterminer ses équations paramétriques** ? L'exemple suivant donne la méthode à suivre.

• **Énoncé :** soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ les plans d'équations respectives $x + y + z - 2 = 0$ et $x + 2y - z + 1 = 0$.

1. Montrer que ces deux plans sont sécants selon une droite $\mathscr{D}$.

2. Déterminer des équations paramétriques de $\mathscr{D}$ et en déduire un vecteur directeur (→ *voir fiche 3*).

• **Réponses :**

1. Des vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ normaux respectivement à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ont pour coordonnées respectives $(1\,;1\,;1)$ et $(1\,;2\,;-1)$.

Comme leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, ils ne sont pas colinéaires, donc $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ne sont pas parallèles. C'est pourquoi ils sont sécants selon une droite $\mathscr{D}$.

2. Les coordonnées d'un point M(x, y, z) de $\mathscr{D}$ vérifient le système $\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$.

Posons $z = t$. Le système équivaut à $\begin{cases} x + y = 2 - t \\ x + 2y = -1 + t \\ z = t \end{cases}$.

Par soustraction des deux premières équations, on trouve $y = -3 + 2t$ et donc : $x = 2 - t - (-3 + 2t) = 5 - 3t$.

Par conséquent, des équations paramétriques de $\mathscr{D}$ sont $\begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = -3 + 2t \\ z = t \end{cases}$.

Un vecteur directeur est $\vec{u}\,(-3\,;2\,;1)$.

Convergence et divergence des suites

FICHE 13

I Opérations sur les limites

1. Appliquer les théorèmes sur les limites des fonctions

Quand on veut calculer des limites de suites, on peut utiliser les théorèmes relatifs aux fonctions (→ *voir fiche 17*).

Exemple : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2+1}{3n^2+4} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2}{3n^2} = \dfrac{1}{3}$.

2. Étude de la convergence

Dans l'hypothèse où on l'on veut savoir si une suite converge, sans vouloir connaître la valeur de la limite, on peut utiliser le tableau suivant qui récapitule le comportement de la suite $(u_n + v_n)$ en fonction de (u_n) et (v_n).

v_n \ u_n	Converge	Diverge
Converge	Converge	Diverge
Diverge	Diverge	On ne peut rien dire

Exemples : 1. $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ converge et $(-1)^n$ diverge donc $\left(\dfrac{1}{n}+(-1)^n\right)$ diverge.

2. Si $u_n = n$ et $v_n = (-1)^n$, alors (u_n) et (v_n) divergent, ainsi que la somme $(n+(-1)^n)$.

3. Si $u_n = n$ et $v_n = -n$, alors (u_n) et (v_n) divergent ; cependant, $u_n + v_n = 0$ et donc la somme converge.

Remarque : les résultats concernant les produits et les quotients sont à traiter cas par cas, notamment en raison des formes indéterminées liées à ces deux opérations.

II Théorèmes de convergence

1. Théorème de convergence monotone

- **Définitions**

Dire qu'une suite (u_n) est **majorée** par un nombre M (respectivement minorée par un nombre m) signifie que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \mathrm{M}$ (respectivement $u_n \geqslant m$).

Dire qu'une suite (u_n) est **bornée** signifie qu'elle est à la fois majorée et minorée. Autrement dit, il existe un nombre k tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant k$.

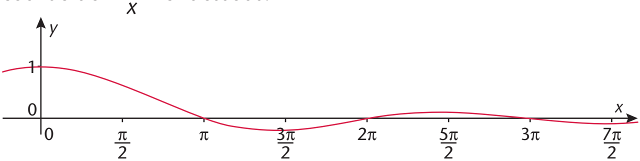
- **Théorème**

- Toute suite croissante et majorée converge.
- Toute suite décroissante et minorée converge.
- Toute suite monotone et bornée converge.

- **Remarques**

- Ces théorèmes assurent la convergence d'une suite, mais ne donnent pas la valeur de la limite.
- On sait que toute suite convergente est bornée. Mais il existe des suites bornées et non convergentes ; c'est le cas de $(-1)^n$.
- Il existe des suites convergentes qui n'entrent dans aucun des trois cas précédents.

Exemple : $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Cependant, (u_n) n'est monotone à partir d'aucun rang, comme le suggère la courbe de $\dfrac{\sin x}{x}$ ci-dessous.



- Toute suite croissante **non majorée** tend vers $+\infty$ et toute suite décroissante **non minorée** tend vers $-\infty$.

2. Théorème des gendarmes

- **Théorème :** soit (u_n), (v_n) et (w_n), trois suites telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et ℓ un nombre réel. Si (u_n) et (w_n) convergent toutes les deux vers ℓ, alors (v_n) converge vers ℓ.

- On utilise souvent ce théorème dans le cas où on a $|u_n - \ell| \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. En effet, on dispose alors de l'encadrement $0 \leqslant |u_n - \ell| \leqslant v_n$ et on utilise le théorème précédent :

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

Il en résulte que la suite (u_n) converge vers ℓ.

- De plus, l'encadrement ci-dessus permet d'avoir une approximation de la limite ℓ.

FICHES
Spécial Bac
Tle

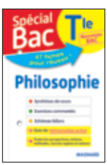
La collection conçue par les correcteurs du Bac

120 fiches détachables pour réussir !

Compil
Maths - SVT

- Des **synthèses de cours** pour retenir l'essentiel
- Des **mémos visuels** et des **schémas-bilans**
- Des **exercices commentés** pas à pas
- Des **quiz de mémorisation active**
- La **méthode** pour réussir le **Grand Oral**

Dans la même collection :



8,90 €

978-2-210-76536-8
9 782210 765368

Compléments gratuits sur :
www.specialbac.magnard.fr