Colles
corrigées et commentées

MPSi

Maths

S'entraîner aux concours dès la **Sup**

ellipses

Mayeul Bacquelin

CHAPITRE 1

LOGIQUE, ENSEMBLES ET APPLICATIONS

1.1 Éléments de logique

Quelques notions à retenir de votre chapitre de logique :

- **Comment nier $\mathcal{P}$, comment exprimer $\bar{\mathcal{P}}$** : Pour nier une proposition $\mathcal{P}$, on va la décomposer (avec des "ou", des "et" et des implications) en propositions élémentaires que l'on va nier, remplacer les ou par des et, les et par des ou, les "Pour tout" par des "Il existe" et les "Il existe" par des "Pour tout". La négation de la proposition : "Tous les habitantes de la rue du stand qui portent des lunettes ou des chapeaux sont des graveuses de talent que l'on peut retrouver au N58 et auront un bon point avant 50 ans" est donc la proposition "Il existe une habitante de la rue du stand qui porte des lunettes ou des chapeaux qui n'est pas une graveuse de talent que l'on peut retrouver au N58 ou qui n'aura pas de bon point avant 50 ans".
- **Comment mener un raisonnement par l'absurde/par contraposée :** Ce sont deux raisonnements proches, à ne pas confondre :
  - **Par l'absurde :** Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On sait que $\mathcal{P}$ est vraie et on souhaite démontrer que $\mathcal{Q}$ est vraie. Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer $\mathcal{Q}$ fausse, i.e. $\overline{\mathcal{Q}}$ vraie, et d'aboutir à une contradiction. On pourra alors conclure que l'hypothèse "$\mathcal{Q}$ fausse" est une hypothèse fausse, ce qui signifie que $\mathcal{Q}$ est vraie. Ce type de raisonnement est intéressant quand la proposition $\overline{\mathcal{Q}}$ est plus exploitable que la proposition $\mathcal{Q}$.
  - **Par contraposée :** Pour démontrer que $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$, on suppose $\mathcal{Q}$ fausse et on prouve que $\overline{\mathcal{P}}$ est alors vraie. On peut alors conclure que, par contraposée, $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$ car on a équivalence entre $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\bar{\mathcal{Q}} \Rightarrow \bar{\mathcal{P}}$.
- **Comment mener un raisonnement par équivalence :** Pour montrer que $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ avec $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions, on peut d'abord montrer que $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ puis on prouve que $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$. Cela signifie qu'on suppose $\mathcal{P}$ vraie et on montre alors que $\mathcal{Q}$ est vraie puis on fait la réciproque. On peut aussi raisonner directement par équivalence. C'est le cas, entre autres, si on a à notre disposition des fonctions bijectives ($x \mapsto \exp(x)$ par exemple), si on résout un système par opérations élémentaires, si on est dans des conditions favorables pour utiliser un théorème donnant une équivalence...

- **Comment mener un raisonnement par Analyse-Synthèse :** On cherche à prouver qu'il existe un unique objet vérifiant une propriété $\mathcal{P}$. Le raisonnement par Analyse-Synthèse se passe en deux étapes :
  - **Analyse :** On suppose avoir trouvé un objet vérifiant $\mathcal{P}$ et on tire les conséquences du fait que cet objet vérifie $\mathcal{P}$. On cherche donc les caractéristiques de ces objets. À la fin de cette phase, on a une liste d'un certain nombre d'objets susceptibles de marcher mais dont on n'est pas sûr qu'ils marchent. À ce stade là, ce dont on est sûr, c'est que les autres, ceux qui ne sont pas dans notre liste, ne vérifient pas le problème !
  - **Synthèse :** Dans cette phase, on teste tous les objets de liste précédente. Cela nous permet d'éliminer les solutions parasites. Si, à la fin, on obtient un unique objet marchant, on aura bien prouvé l'existence et l'unicité d'un objet vérifiant $\mathcal{P}$.

Colle 1

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique couple de fonctions (g, h) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que g soit paire, h impaire et $f = g + h$.

Le plus simple est probablement de partir sur un raisonnement par analyse-synthèse !

On va faire un raisonnement par analyse/synthèse.

- **Analyse :** Supposons qu'il existe un couple de fonctions (g, h) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que g soit paire, h impaire et $f = g + h$. Soit x un réel, en exploitant la parité de g et l'imparité de h, on a alors :

$$f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$$

  Or, on sait que $f(x) = g(x) + h(x)$. On a donc, pour tout réel x, les deux égalités suivantes :

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

  On a donc un seul objet susceptible de marcher (un seul, pas deux car on cherche un couple !). On aura donc zéro ou une solution.
- **Synthèse :** On définit les fonctions g et h par :

$$\text{Pour tout réel } x,\ g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Soit x un réel, on a :

$$g(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x) \qquad h(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -h(x)$$

donc g est paire et h impaire. Quand on ajoute g et h, on obtient bien f. On a donc obtenu l'unicité et l'existence par Analyse-Synthèse !

1.2 Ensembles

Voici les différentes tâches les plus classiques que l'on vous posera :

- **Comment montrer que** $E \subset F$**,** $E = F$ **:** $E = F$ se prouve en démontrant que $E \subset F$ et $F \subset E$ (raisonnement par double inclusion). Une simple inclusion suffit pour avoir l'égalité si E et F sont de cardinal fini et si Card$(E) =$ Card(F). Pour prouver que $E \subset F$, on prend x, un élément quelconque de E, et on montre que x est nécessairement dans F. Parfois, à l'aide des propriétés du cours comme la distributivité, l'associativité, les lois de Morgan, on peut prouver l'inclusion sans avoir à redescendre jusqu'au niveau de l'élément.
- **Comment prouver et utiliser que** $x \in A \cup B$ **:** On prend un élément x. Deux grandes techniques pour prouver que $x \in A \cup B$:

  1. Première technique, celle du bilan. On fait une hypothèse, on prouve alors que x est dans un ensemble A. On fait une autre hypothèse, on prouve que x est dans B. Si nos hypothèses recouvrent tous les cas possibles que peut rencontrer x alors on peut affirmer que x appartient à $A \cup B$.
  2. Deuxième technique, celle de l'ajout d'hypothèse. Pour montrer que $x \in A \cup B$, il suffit de prouver que si $x \notin B$, alors $x \in A$.

  Quand on nous dit que $x \in A \cup B$, on ne sait pas si x est dans A ou dans B mais on est sûr qu'il est au moins dans l'un des deux ! Pour exploiter cette information, il suffit de distinguer les cas :
  — Si x est dans A alors... blabla...
  — Si x est dans B alors... blabla...
  et de faire une conclusion ! L'avantage de procéder ainsi est de pouvoir exploiter les propriétés de A (dans le premier cas) puis de B (second cas).
- **Comment montrer que** $x \in \bar{A}$ **:** On réalise souvent cette tâche par l'absurde. On suppose que $x \in A$ et on se rend compte qu'il y a comme un problème. Cette idée de l'absurde est assez naturelle car $\bar{A}$ est défini lui-même par "négativité", ce sont les x de E tels que $x \notin A$.

Colle 2

Soit E un ensemble et A, B et C trois parties de E.

1. Montrer que $(B \backslash C) \cup (A \backslash C) = (B \cup A) \backslash C$.
2. Montrer que $(B \cup A) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (B \cap A) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

Faire un raisonnement par double inclusion pour la première question. Par contre, inutile de revenir aux éléments pour la seconde ! Ne pas hésiter à exploiter les opérations sur les ensembles (distributivité et compagnie).

1. Soit x un élément de $(B\backslash C) \cup (A\backslash C)$.
   - **Cas 1 :** On suppose que x appartient à $B\backslash C$. x est dans B donc en particulier dans $B \cup A$. x n'appartient pas à C. x appartient donc à $(B \cup A)\backslash C$.
   - **Cas 2 :** On suppose que x appartient à $A\backslash C$. On prouve de même que x appartient à $(B \cup A)\backslash C$.

   Bilan : x appartient à $(B \cup A)\backslash C$. Cela nous permet d'affirmer la première inclusion : $(B\backslash C) \cup (A\backslash C) \subset (B \cup A)\backslash C$.

   Supposons désormais que x est un élément de $(B \cup A)\backslash C$. x n'appartient donc pas à C et x appartient à $B \cup A$.
   - **Cas 1 :** On suppose que x appartient à B. x est dans B et x n'appartient pas à C. x appartient donc à $B\backslash C$.
   - **Cas 2 :** On suppose que x appartient à A. On prouve de même que x appartient à $A\backslash C$.

   Bilan : x appartient à $(B\backslash C) \cup (A\backslash C)$ ce qui prouve que : $(B \cup A)\backslash C$ est inclus dans $(B\backslash C)\cup(A\backslash C)$. Par double inclusion, on a donc prouvé l'égalité souhaitée !

2. En utilisant la distributivité de l'union sur l'intersection, on obtient :

$$(B \cup A) \cap (B \cup C) = B \cup (C \cap A).$$

   Par distributivité, on en déduit :

$$\begin{aligned}(B \cup A) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) &= (B \cup (C \cap A)) \cap (C \cup A)\\ &= (B \cap (C \cup A)) \cup ((C \cap A) \cap (C \cup A))\\ &= (B \cap (C \cup A)) \cup (C \cap A)\\ &= ((B \cap C) \cup (B \cap A)) \cup (C \cap A).\end{aligned}$$

Colle 3

Soit E un ensemble non vide. Soit A, B et C trois parties de E.

1. Montrer que si $\chi_A = \chi_B$ (χ_A état l'application caractéristique, définition rappelée dans l'indication juste après si besoin est) alors $A = B$.
2. Montrer que $\chi_A^2 = \chi_A$, $\chi_{\bar{A}} = 1-\chi_A$, $\chi_{A\cap B} = \chi_A\chi_B$ et $\chi_{A\cup B} = \chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}$.
3. En déduire que $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$ en rappelant que $A\triangle B$ est $(A \cup B)\backslash(A\cap B)$, soit l'ensemble des éléments qui sont ou bien dans A, ou bien dans B.

On rappelle que : $\chi_A : \begin{cases} E & \to \{0;1\} \\ x & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases} \end{cases}$. Si f et g sont deux applications d'ensemble de départ E, $f = g$ signifie que $f(x) = g(x)$ pour tout x de E. Calculer donc $\chi_A(x) \times \chi_A(x), \chi_{\bar{A}}(x), \chi_{A\cap B}(x)$ (en pensant à distinguer les cas afin de pouvoir expliciter ces objets). Pour la dernière question, pensez à faire la synthèse de ce qui a été vue.

1. Supposons donc que $\chi_A = \chi_B$ et prenons un x dans A alors $\chi_A(x) = 1$ et donc $\chi_B(x) = 1$ (car $\chi_A = \chi_B$) et donc $x \in B$... ce qui prouve que $A \subset B$ puis, comme l'autre sens est similaire, que $A = B$. On remarque que la réciproque est évidente, on a donc : $\chi_A = \chi_B \iff A = B$.
2. Fixons un x dans E pour toute la question.
   - Si $x \in A$ alors $\chi_A(x) = 1$ et $\chi_{\bar{A}}(x) = 0$ donc $\chi_A(x) = \chi_A(x) \times \chi_A(x)$ et $\chi_A(x) = 1 - \chi_{\bar{A}}(x) = 0$.
   - Si $x \notin A$ alors $\chi_A(x) = 0$ et $\chi_{\bar{A}}(x) = 1$ et donc $\chi_A(x) = \chi_A(x) \times \chi_A(x)$ et $\chi_A(x) = 1 - \chi_{\bar{A}}(x) = 0$.

   On a donc $\chi_A(x) \times \chi_A(x) = \chi_A(x) = (1 - \chi_{\bar{A}})(x)$ pour tout x de E d'où $\chi_A \times \chi_A = \chi_A = 1 - \chi_{\bar{A}}$.
   - Si $x \in A \cap B$, $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) = \chi_B(x) = 1$ et donc, on constate qu'on a bien : $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \times \chi_B(x)$.
   - Si $x \in B \backslash A$, $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) = 0$ et $\chi_B(x) = 1$ et donc de nouveau, on a : $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \times \chi_B(x)$.
   - Si $x \in A \backslash B$... cas similaire !
   - Si $x \in E \backslash (A \cup B)$ alors on a encore $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \times \chi_B(x)$ car $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) = \chi_B(x) = 0$.

   On peut donc finalement bien conclure que $\chi_{A\cap B} = \chi_A \times \chi_B$ car ces deux applications ont même image. On procède à la même découpe pour $\chi_{A\cup B}$.
3. En utilisant la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} \chi_{(A\triangle B)\triangle C} &= \chi_{((A\triangle B)\backslash C)\cup(C\backslash(A\triangle B))} \\ &= \chi_{(A\triangle B)\backslash C} + \chi_{C\backslash(A\triangle B)} - \chi_{((A\triangle B)\backslash C)\cap(C\backslash(A\triangle B))} \end{aligned}$$

   Or : $\chi_{((A\triangle B)\backslash C)\cap(C\backslash(A\triangle B))} = \chi_\emptyset$ et $\chi_\emptyset : x \mapsto 0$ d'où :

$$\begin{aligned} \chi_{(A\triangle B)\triangle C} &= \chi_{(A\triangle B)\backslash C} + \chi_{C\backslash(A\triangle B)} \\ &= \chi_{(A\triangle B)\cap\bar{C}} + \chi_{C\cap\overline{(A\triangle B)}} \\ &= \chi_{A\triangle B}(1 - \chi_C) + \chi_C(1 - \chi_{A\triangle B}) \text{ d'après la question 2} \end{aligned}$$

   De la même manière :

$$\chi_{A\triangle B} = \chi_A\chi_{\bar{B}} + \chi_B\chi_{\bar{A}} = \chi_A(1 - \chi_B) + \chi_B(1 - \chi_A) = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B$$

   et donc :

$$\chi_{(A\triangle B)\triangle C} = \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2\chi_A\chi_B - 2\chi_A\chi_C - 2\chi_C\chi_B + 4\chi_A\chi_B\chi_C$$

   On fait la même chose pour $\chi_{A\triangle(B\triangle C)}$ et on se rend compte qu'on a la même chose. Comme $\chi_{(A\triangle B)\triangle C} = \chi_{A\triangle(B\triangle C)}$, d'après la question 1, on peut donc affirmer que : $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$.

1.3 Applications

Dans ce chapitre, on vous demandera de prouver qu'on a une injection/surjection/bijection et on vous demandera de jouer un peu avec la notion de fonction réciproque. Quelques détails :

- **Comment montrer qu'on a une injection :** Comme le suggère la définition même d'une injection, les deux grandes techniques pour montrer que f est injective sont les suivantes :

  1. **Première technique : résolution de l'équation** $y = f(x)$. On prend y un élément quelconque de l'espace d'arrivée puis on s'intéresse à l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x élément de l'espace de départ (x est l'inconnue, y est fixé) et on montre que, pour n'importe quel y, cette équation a au plus une solution (donc 0 ou 1 à chaque fois).

  2. **Deuxième technique : on part de** $f(x) = f(x')$. On prend x et x' deux éléments de l'espace de départ tels que $f(x) = f(x')$. On prouve qu'on a automatiquement $x = x'$. Si tel est le cas, on pourra alors conclure que f est injective.

  Ne pas hésiter aussi à représenter f si f est une fonction numérique d'une variable réelle, vous lirez sur le graphe le nombre d'antécédent pour tout point de l'espace d'arrivée. À noter aussi que la composée de deux injections est une injection ainsi que la grande utilité des injections : si on a une injection f entre deux ensembles E et F, il est alors équivalent de prouver $x = x'$ (avec x et x' deux éléments de E) et $f(x) = f(x')$. Pour comparer des éléments de E, il suffit donc d'utiliser f et comparer ceux de F.

- **Comment montrer qu'on a une surjection :** Pour montrer que f est surjective, on résout l'équation $y = f(x)$ où y est un élément quelconque fixé de l'ensemble d'arrivée et où x est l'inconnue et appartient à l'ensemble de départ. Montrer que f est une surjection revient à prouver que cette équation a toujours au moins une solution (au moins... donc si vous en trouvez 1, 2 ou 10, ça rentre dans le cadre... c'est juste 0 qu'on ne veut pas !). Ne pas hésiter aussi de nouveau à représenter f si f est une fonction numérique d'une variable réelle, vous lirez sur le graphe si chaque point de l'espace d'arrivée est atteint au moins une fois. Souvenez-vous aussi que la composée de deux surjections est une surjection. À noter aussi la grande utilité des surjections : si on a une surjection f entre deux ensembles E et F, tous les éléments de F peuvent s'écrire sous la forme $f(x)$ avec x dans E. On relie par cette méthode les éléments de E et ceux de F.

- **Comment montrer qu'on a une bijection :** Voici les trois grandes techniques pour montrer que f est bijective :

  1. **Première technique : injection et surjection**. C'est la méthode de base. On montre que f est injective puis que f est surjective.

  2. **Deuxième technique : résolution de l'équation** $y = f(x)$. On résout l'équation $y = f(x)$ où y est un élément quelconque fixé de l'ensemble d'arrivée et où x est l'inconnue et appartient à l'ensemble de départ. Montrer que f est une bijection revient à prouver que cette équation a toujours exactement une solution.

3. **Troisième technique : en cherchant la réciproque**. Si on explicite une fonction g telle que $g \circ f = id_G$ et $f \circ g = id_F$ alors on peut affirmer que f est bijective (et g est sa réciproque au passage).

Ne pas hésiter aussi de nouveau à représenter f si f est une fonction d'une variable réelle, vous lirez sur le graphe si chaque point de l'espace d'arrivée est atteint précisément une fois, pensez aussi dans ce cas au théorème de la bijection continue. Souvenez-vous aussi que la composée de deux bijections est une bijection.

- **Comment exprimer la réciproque :** Cela peut être immédiat par composition car on sait que, si f et g sont bijectives et si $f \circ g$ existe alors $f \circ g$ est bijective et sa réciproque est $g^{-1} \circ f^{-1}$. Autre chose à noter avant de faire de façon classique, si on trouve g telle que $g \circ f = id_G$ et $f \circ g = id_F$ alors on peut affirmer que f est bijective et f^{-1} est g. La plupart du temps, pour expliciter une réciproque, on résout l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x élément du départ et où y est un élément fixé de l'espace d'arrivée. On trouve une unique solution x qu'on exprime en fonction de y. On a donc : $y = f(x) \Leftrightarrow x = h(y)$ avec h une fonction qui s'avère être la réciproque cherchée !Attention, ne parlez pas de la réciproque tant que vous n'avez pas prouvé son existence !

Colle 4

Soit E un ensemble non vide et f, g et h des applications de E dans E.

1. Démontrer que $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective et $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective.
2. En déduire que $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ injectives et $f \circ h \circ g$ surjective $\Rightarrow$ g, f et h bijectives.
3. Montrer que $g \circ f$ et $h \circ g$ bijectives $\Rightarrow$ f, g et h bijectives.

Pensez à bien exploiter les propriétés vues dans la première question dans les questions 2 et 3. Pour la première question, on attend une démonstration (même si c'est dans votre cours). Relisez ce qu'on a écrit sur les façons de faire pour prouver qu'on a une injection, surjection.

1. Ça fait partie de votre cours mais visiblement, ici, on nous demande de le redémontrer alors on s'exécute. On suppose $g \circ f$ injective. Soient x et x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$. On a alors, en composant par g, $g(f(x)) = g(f(x'))$ soit $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ et donc $x = x'$ car $g \circ f$ est injective. Donc $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$. f est donc injective. On suppose maintenant $g \circ f$ surjective. Soit y un élément de E, il existe donc un x dans E tel que $(g \circ f)(x) = y$. On peut écrire cela sous la forme suivante : $g(f(x)) = y$. y a donc un antécédent par g, c'est $f(x)$. g est donc bien surjective.
2. On suppose $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ injectives et $f \circ h \circ g$ surjective.

On ne va pas résoudre d'équation, on exploite la première question. Pensez toujours à relier les questions entre elles !

D'après 1), on a donc f injective, h injective et f surjective. f est donc bijective, on introduit f^{-1}. f^{-1} est bijective donc en particulier surjective et donc, par composition, $f^{-1} \circ (f \circ h \circ g)$ est surjective i.e. $h \circ g$ est surjective et donc h est surjective. Or h est injective donc h est bijective. h^{-1} existe donc et, par composition, $h^{-1} \circ (h \circ g)$ est surjective et donc g est surjective. Or $g \circ f \circ h$ est injective donc $(g \circ f \circ h) \circ h^{-1} \circ f^{-1}$ l'est et donc g est injective.

3. On suppose $g \circ f$ et $h \circ g$ bijectives. $g \circ f$ est donc surjective donc g l'est (toujours d'après 1)) et $h \circ g$ est injective donc g l'est (toujours d'après 1)). g est donc bijective, et, par composition, f, qui est $g^{-1} \circ (g \circ f)$, l'est ainsi que h qui est $(h \circ g) \circ g^{-1}$.

Colle 5

Ces deux questions sont indépendantes.

1. Soit $h : \begin{cases} \mathbb{R}\backslash\{2\} & \to \mathbb{R}\backslash\{2\} \\ x & \mapsto \left(\dfrac{2x-1}{x-2}\right) \end{cases}$.
   (a) Montrer que h est bijective et expliciter h^{-1}.
   (b) Soit $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$. Trouver toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ telles que, pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, $f(h(x)) - af(x) = e^x$.
2. Soit $f : x \mapsto ax + b + |x|$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit bijective puis trouver alors f^{-1}.

Pour la première question, ne procédez pas en deux temps. Démontrez que h est bijective en explicitant sa réciproque. Pensez à faire intervenir h^{-1} dans la suite. Pour la deuxième question, débarrassez vous de la valeur absolue en distinguant les cas. utilisez le théorème de la bijection continue (théorème appelé théorème de la valeur intermédiaire en terminale). Dérivez si vous le pouvez !

1.(a) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}\backslash\{2\})^2$. On a :

$$h(x) = y \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-2} = y \Leftrightarrow x(2-y) = -2y + 1 \Leftrightarrow x = h(y)$$

Donc $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}\backslash\{2\})^2, h(x) = y \Leftrightarrow x = h(y)$. (Remarque : on peut bien exclure 2 du domaine de recherche car $\dfrac{2x-1}{x-2} = 2 \Leftrightarrow 0 = -4 + 1$, ce qui est faux !). Tout élément y de $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ a donc un unique antécédent par h, c'est $h(y)$. h est donc bijective et h^{-1} est h (On peut d'ailleurs vérifier que $h \circ h = \mathrm{id}_{(\mathbb{R}\backslash\{2\})}$).

(b) Soit $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ et f une fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$. On suppose que, pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, on a : $f(h(x)) - af(x) = e^x$. Posons $y = h(x)$, on a donc $f(y) - af(h^{-1}(y)) = e^{h^{-1}(y)}$, soit $f(y) - af(h(y)) = e^{h(y)}$ car $h = h^{-1}$ et donc, pour tout y de $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, $f(y) - af(h(y)) = e^{h(y)}$. Fixons x un