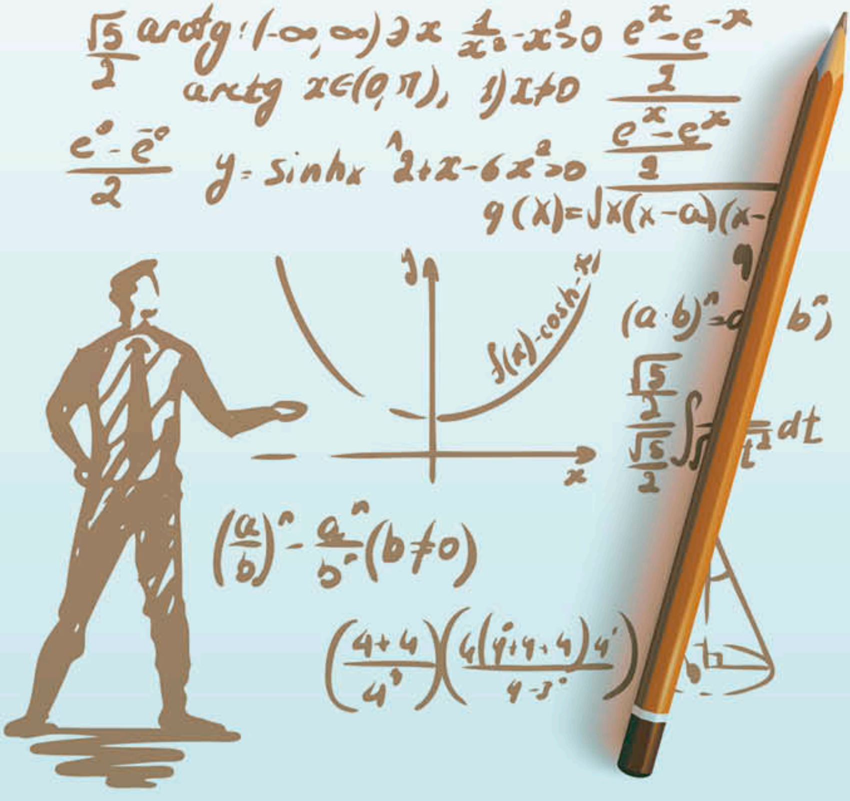
2de–1re
Tle

L'essentiel des démonstrations en mathématiques



ellipses

David Repellin

CHAPITRE 1

Les identités remarquables, les racines carrées et les équations

1.1 Identités remarquables

Propriété 1

Pour tous réels a et b, on a les trois identités remarquables suivantes :

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Démonstration.

1. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$

■

Il est important de connaître des illustrations géométriques de ces 3 identités remarquables dans des cas particuliers.

1. Première identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

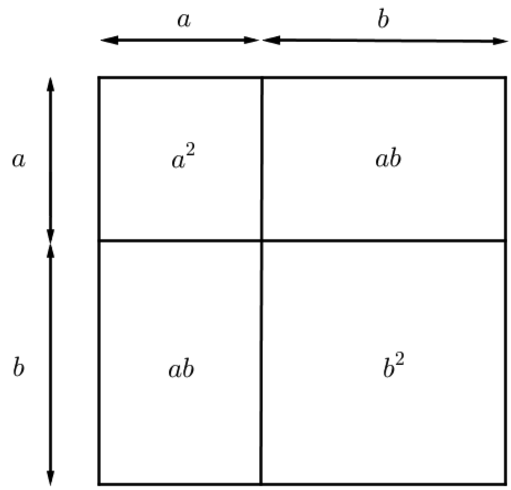


FIGURE 1.1

Si $a > 0$ et $b > 0$, en calculant l'aire du grand carré de côté $a+b$ de deux manières différentes, on retrouve la première identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

2. Deuxième identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

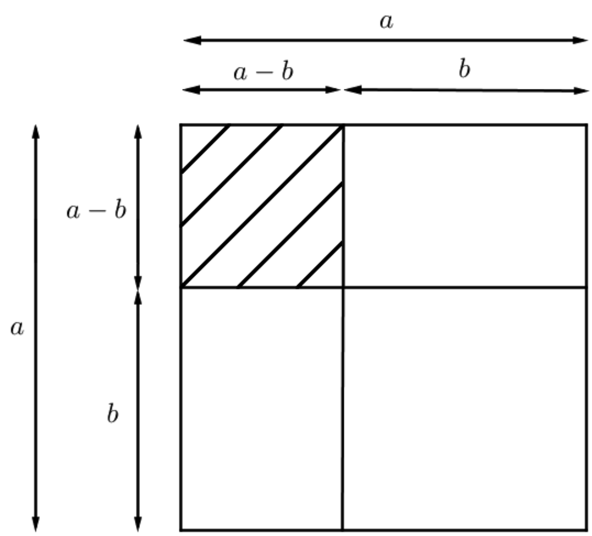


FIGURE 1.2

Si $a > b > 0$, en calculant l'aire du carré de côté $a - b$ de deux manières différentes (la deuxième consistant à retirer à l'aire du grand carré de côté a celles de deux rectangles d'aire ab et puisqu'on retire deux fois l'aire du carré de côté b d'ajouter une fois son aire, c'est-à-dire b^2) ; on retrouve alors la deuxième identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

3. Troisième identité remarquable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$:

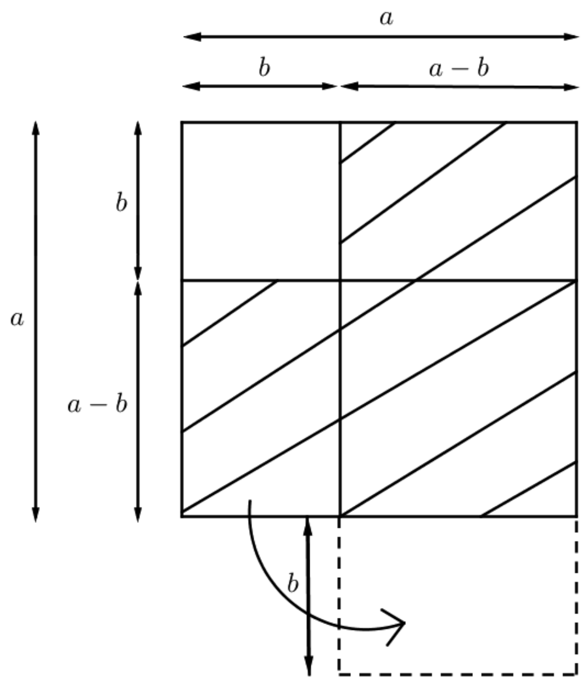


FIGURE 1.3

Si $a > b > 0$, en calculant l'aire hachurée de deux manières différentes, la première consistant à retirer à l'aire du grand carré de côté a celle du petit de côté b et la deuxième à calculer l'aire d'un rectangle de largeur $a - b$ et de longueur $a + b$ en déplaçant un rectangle de dimensions b et $a - b$ comme sur le dessin, on retrouve la troisième identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

1.2 Racines carrées

Propriété 2

Pour tous réels $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, on a :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

et pour tous réels $a \geqslant 0$ et $b > 0$, on a :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Démonstration.

Il s'agit de remarquer d'abord que $\sqrt{ab} \geqslant 0$ et $\sqrt{a}\sqrt{b} \geqslant 0$ donc

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \Leftrightarrow \left(\sqrt{ab}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2$$

En effet, $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 0$ (identité remarquable 3) $\Leftrightarrow$ $x = y$ (x et y ont le même signe) ou $x = -y$ (x et y sont de signe opposé) et si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ cela implique que $x = y$ ici on choisit $x = \sqrt{ab}$ et $y = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

De là c'est immédiat car $\left(\sqrt{ab}\right)^2 = ab = \left(\sqrt{a}\right)^2\left(\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2$.

□

Même remarque pour le quotient $\sqrt{\frac{a}{b}} \geqslant 0$ et $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geqslant 0$ donc

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2$$

or $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{a}{b} = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2$.

□

■

Remarque 1

En général, pour tous réels $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$,

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Exemple 1 : $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7 \neq 5$.

Terminons cette deuxième section par un exercice qui approfondit la remarque précédente.

Exercice 1 :

À quelle(s) condition(s) sur les réels positifs a et b a-t-on $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$?

Correction :
Remarquons d'abord que $\sqrt{a+b} \geqslant 0$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geqslant 0$.
De là,

$$\begin{array}{rrcll} & \sqrt{a+b} & = & \sqrt{a} + \sqrt{b} & \\ \Leftrightarrow & \left(\sqrt{a+b}\right)^2 & = & \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 & \\ \Leftrightarrow & a+b & = & a + 2\sqrt{ab} + b & \text{grâce à l'identité remarquable 1 et} \\ & & & & \text{la formule 1 de la propriété 2.} \end{array}$$

On a donc

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \;\Leftrightarrow\; 2\sqrt{ab} = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(2\sqrt{ab}\right)^2 = 4ab = 0$$

Finalement

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \;\Leftrightarrow\; ab = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 0 \text{ ou } b = 0$$

1.3 Les équations

On s'intéresse maintenant à la résolution des équations de la forme $x^2 = a$ où $a \in \mathbb{R}$.

Propriété 3

Les équations de la forme $x^2 = a$ où $a \in \mathbb{R}$,

- n'ont aucune solution si $a < 0$;
- admettent une unique solution qui est $x = 0$ si $a = 0$;
- admettent deux solutions $x = -\sqrt{a}$ ou $x = \sqrt{a}$ si $a > 0$.

Démonstration.

- Si $a < 0$, comme $x^2 \geqslant 0$, l'équation $x^2 = a$ n'a aucune solution ce qui se note aussi $\mathscr{S} = \emptyset$.

  □

- Si $a = 0$, $x^2 = a \Leftrightarrow x^2 = 0$ qui n'a qu'une solution $x = 0$ qui se note aussi $\mathscr{S} = \{0\}$.

  □

- Si $a > 0$,

$$\begin{aligned} x^2 = a &\Leftrightarrow x^2 - a = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \sqrt{a}\right)\left(x - \sqrt{a}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\sqrt{a} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{a} \end{aligned}$$

  on note alors $\mathscr{S} = \{-\sqrt{a}\ ;\ \sqrt{a}\}$. □

■

CHAPITRE 2

Arithmétique

Propriété 4

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- Un nombre entier et son carré ont la même parité.
- Si $n \in \mathbb{Z}$, n est pair $\Leftrightarrow n^2$ est pair.
- Si $n \in \mathbb{Z}$, n est impair $\Leftrightarrow n^2$ est impair.

Démonstration.

Nous allons démontrer :

Si $n \in \mathbb{Z}$, n est impair $\Leftrightarrow n^2$ est impair.

La propriété au-dessus s'en déduit par contraposée des deux implications de l'équivalence.

Tout d'abord, n est impair $\Leftrightarrow n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$ d'où

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \quad \text{(identité remarquable 1)}$$

et $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{Z}$ (prendre $p = 2k^2 + 2k$) donc n^2 est impair.

Remarque 2

On a même $p = 2k^2 + 2k = 2k(k+1) \in \mathbb{N}$ car si $k \in \mathbb{N}$ alors $2k(k+1) \in \mathbb{N}$ par produit de deux nombres positifs ; et si $k \leqslant -1 < 0$, $2k(k+1) \in \mathbb{N}$ par produit de deux nombres négatifs.

Nous venons de démontrer

$$n \textit{ est impair} \Rightarrow n^2 \textit{ est impair} .$$

Pour démontrer l'autre implication à savoir

$$n^2 \textit{ est impair} \Rightarrow n \textit{ est impair} ,$$

il est plus facile de démontrer sa contraposée qui est

$$n \textit{ est pair} \Rightarrow n^2 \textit{ est pair} .$$

Pour cela, il suffit d'écrire n est pair $\Leftrightarrow n = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, d'où

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2 = 2q$$

avec $q \in \mathbb{Z}$ (prendre $q = 2k^2$) donc n^2 est pair et l'équivalence n est impair $\Leftrightarrow$ n^2 est impair et la propriété 4 sont démontrées.

Remarque 3

On a même $q = 2k^2 \in \mathbb{N}$ comme un carré est toujours positif.

$\blacksquare$

Propriété 5

$\sqrt{2}$ n'est pas rationnel ou $\sqrt{2}$ est irrationnel ou $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ou $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$

Démonstration.

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ c'est-à-dire que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$